DOI:10.19980/j.CN23-1593/G4.2023.11.027

数学建模思想在高等数学教学中的探究

李 瑞,但 炜*
(深圳技术大学 大数据与互联网学院,广东 深圳 518118)

摘 要:随着科学技术的不断发展,数学在各个领域都显示出极其重要的作用。而数学建模可以很好地将数学理论和实际问题有效地联系起来。因此,该文主要论述数学模型、数学实验与高等数学教学的密切联系,并结合具体实例阐述数学建模思想对高等数学教学的重要性。与此同时,数学建模思想在高等数学教学中的应用,对学生数学阅读能力的培养,数学文化的熏陶也具有深远意义。

关键词:数学建模;高等数学;数学阅读;数学软件;数学实验
中图分类号:G642 **文献标志码**:A **文章编号**:2096-000X(2023)11-0112-04

Abstract: With the continuous development of science and technology, mathematics has shown an extremely important role in various fields. And mathematical modeling can effectively connect mathematical theory and practical problems. Therefore, the close connection between mathematical models, mathematical experiments and the teaching of calculus are discussed in this paper. By illustrating the corresponding examples, the significance of penetrating ideas of mathematical modeling into the teaching of calculus are provided. In addition, the meaning of the cultivation of students´ mathematical reading ability and mathematical culture are also mentioned.

Keywords: mathematical modeling; calculus; mathematical reading; mathematical software; mathematical experiments

随着科学技术的不断发展，数学在各个领域都显示出极其重要的作用，可以说数学进入一门科学的程度可以从某种意义上反映这门科学的成熟程度。近几年来随着数学与计算机技术的结合,“数学技术”这一词也被不断提及,甚至有了“高技术本质上是一种数学技术”的提法[1]。H. Neunzert 指出:“数学是关键技术的关键。”M.Atiyah 也称:“纯数学中的一些理论和技巧是数学技术。[2]”所谓数学技术是指数学在研究、运用和教与学的过程中,借助工具,采取适当的方法和技能的最终产物[3]。由此可见,利用数学方法和数学工具解决来自其他领域的实际问题,是一项极其重要的素质和能力,也是未来不可忽视的重要趋势。

高等数学是大学期间最重要的基础课程,高等数学的学习一方面是为学生后续课程的学习奠定一定的数学基础,同时也有助于培养学生的逻辑推理能力和对知识的应用能力。

作为一名大学老师，如何引导学生学好数学,是一项重要任务。结合自身经历来看,思考和理解是学好数学的关键。而做好思考,首先需要激发学生对数学的兴趣,在教学中常常发现学生会认为所学的数学知识仅仅是为了应付考试,而没有实际的意义,导致学习枯燥,缺乏学习的动力。这样对学生来说就很难形成真正的思考。而做好理解,则需要把所学的知识运用到实际的情境中，让学生结合感同身受的问题,体会数学的强大。数学建模作为数学理论和实际问题的桥梁,可以很好地将二者有效地联系起来,从而提高学生学习的积极性。此外数学建模也是培养学生数学能力很好的途径。然而对于绝大多数学生来说,数学建模的能力还是极其欠缺的,中学时期开展数学建模的学校少之又少,学生也都沉浸在应试教育的氛围中。因此,在大学刚刚开始的课堂中引入数学建模的思想是十分重要且关键的[1]。

纵观高等数学整本教材，不难发现很多章节都和实际问题关系密切，如导数里的极值问题和实际里优化问题、微分方程与人口模型、传染病模型、函数与现实预测等。通常来说,数学建模包含两部分的内容:数学模型和数学实验。因此,本文将结合具体的实例来说明

基金项目:国家自然科学基金青年基金支持“空间异质环境中几类变异-竞争模型的研究”(12101416);2021年深圳技术大学教学改革项目“数学建模思想和方法在机器学习及高数学教学中的探索与应用”(20211008)
第一作者简介:李瑞(1987-),女,汉族,山西大同人,博士,助理教授。研究方向为非线性偏微分方程理论及其应用。
* **通信作者**:但炜(1982-),男,汉族,湖北黄梅人,博士,副教授。研究方向为数值计算。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

高等数学与数学模型和数学实验的密切联系。

一 高等数学与数学模型

数学模型是用数学的语言(符号或图形)和方法,通过抽象、合理简化建立能刻画或近似刻画并解决实际问题的一种强有力的工具[4]。因此在教学中适当引入一定的实际问题,结合数学建模的思想,可以很好地启发学生学习数学的兴趣。然而结合数学发展史,会发现很多数学工具的发现和发明都来源于生产实践,恩格斯也曾说:“和其他所有科学一样,数学是从人们的实际需要中产生的,是从丈量地段面积和衡量器物容积,从计算时间,从制造工作中产生的”,由此可见,数学模型的融入不仅有利于数学历史和数学文化的渗透,同时对学生理解数学方法和概念也具有重要的意义。比如在高数教学中, 极限与无穷级数一直都是学生学习的难点和重点,然而这一概念的发现则来源于古希腊哲学家芝诺提出的“阿喀琉斯悖论”。

例 1:阿喀琉斯是古希腊最勇猛的勇士、最善跑的英雄,正是其在特洛伊战争中两次扭转战局。而芝诺说尽管阿喀琉斯是最擅长奔跑的英雄,但若让爬得很慢的乌龟先行,如行至点 B,然后再和阿喀琉斯赛跑,则阿喀琉斯永远也追不上乌龟。因为阿喀琉斯若想要追上乌龟,必须先从点 A 到达乌龟所在的点 B,而当阿喀琉斯到达点 B 时,继续前行的乌龟势必会到达点 C;当阿喀琉斯到达点 C 时,乌龟则会继续前进至点 D.....如此这般,无论阿喀琉斯多么努力追赶,也永远无法追上乌龟,这便是著名的阿基里斯悖论。试分析解释该问题[5-6]。

解:首先使用数学建模的思想,将该实际问题转化为一个数学问题,并做如下假设

设距离 AB 的长度为 S_0,乌龟的速度为 v_0,阿喀琉斯的速度为 v,且 $v=kv_0$。

则第一次追赶时乌龟向前爬行的距离为 $S_1=\frac{S_0}{v}v_0=\frac{S_0}{k}$,第二次追赶乌龟向前爬行时的距离为 $S_2=\frac{S_1}{v}v_0=\frac{S_1}{k}=\frac{S_0}{k^2}$,…,第 n 次追赶乌龟向前爬行时的距离为 $S_n=\frac{S_0}{k^n}$。

故此时乌龟总共向前爬行的距离为 $l_n=\frac{S_0}{k}+\frac{S_0}{k^2}+\cdots+\frac{S_0}{k^n}=\frac{S_0}{k-1}(1-\frac{1}{k^n})$。

因此若将此过程进行无穷次后,乌龟爬行的距离则为 $l=\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\frac{S_0}{k-1}<\infty$。从而说明芝诺悖论不成立。

注:在解决该问题时首先进行模型假设,符号说明,对于该过程进行分段建模,并计算出相应的距离,最终结合高等数学中的极限思想给出无穷项求和的基本方法。

下面将以常微分方程的为例结合实际问题说明数学建模在高等数学教学中的应用。

例 2:随着新型冠状病毒感染疫情(以下简称新冠感染)对全球的影响,传染病的动力学研究也越来越受到大家的关注。现有某区某医院离院人数的记录数据见表 1。

表 1 某区某医院离院人数数据

时间/d	1	2	3	4	…	N
离院人数/人	r_1	r_2	r_3	r_4	r_k	r_N

请结合现有数据估计新冠感染在该地区的传染率和治愈率,并对疾病未来流行趋势进行预测。说明数据统计期间本医院无病死病例, 该地区总人数保持不变,统计之初易感人群数量为 S_0。

解:首先进行数学建模,结合题目分析该问题涉及如下变量, 故设

N 为该地区总人口数;

$S(t)$ 为易感染人群的数量;

$I(t)$ 为感染人群的数量;

$R(t)$ 为治愈人群的数量;

a 为传染率;

b 为治愈率。

根据题目可知 $R(t)$ 的实时数据,且 N 为常数,且有 $N=I(t)+R(t)+S(t)$。由于该地区统计期间无病死病例,因此可根据治愈人群的变化情况建立如下等式

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=bI(t)=b(N-R(t)-S(t)) \quad 。 \tag{1}$$

即治愈人数的变化等于治愈率与感染人数的乘积。

而易感染人数 $S(t)$ 的变化则由感染率和感染人数决定。其中一个感染者能传染的的易感染者的数量与该区域易感染者的数量及传染率有关,即 $aS(t)$,而在单位时间内被所有感染者传染的易感染者人数则为 $aS(t)I(t)$,故有

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=-aS(t)I(t) \quad 。 \tag{2}$$

同理染病者的人数 $I(t)$ 变化为

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=aS(t)I(t)-bI(t) \quad 。 \tag{3}$$

即感染者人数变化来源于易感染者的输入和治愈者的输出。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

结合式(2)(3),则有

$$\frac{dI(t)}{dS(t)}=-1+\frac{b}{aS(t)}。\quad(4)$$

由式(2)可知,$\frac{dS(t)}{dt}<0$,表明 $S(t)$ 随时间单调递减。而结合式(3)利用相平面分析很容易得到:当 $S_0>\frac{b}{a}$ 时,$I(t)$ 增加,而随着 $S(t)$ 逐渐减少,当 $S=\frac{b}{a}$ 时,$I(t)$ 达到最大,而当 $S<\frac{b}{a}$ 时,$I(t)$ 开始递减直至为0。因此只要取 $S_0>\frac{b}{a}$,则疾病就会流行,故取

$$R_0=\frac{aS_0}{b}\quad。\quad(5)$$

易知当 $R_0>1$ 时,疾病流行,当 $R_0<1$ 时,疾病不流行.结合式(1)和式(2),则有

$$\frac{dS(t)}{dR(t)}=-\frac{aS(t)I(t)}{bI(t)}=-\frac{a}{b}S(t)\quad。\quad(6)$$

结合初始条件 $S(0)=S_0$,则利用分离变量法求解该常微分方程则有 $S=S_0e^{-\frac{R(t)a}{b}}$。再代入式(1)使用分离变量法则可求解出 $R(t)$ 的表达式,结合所给的数据容易计算传染率 a 和治愈率 b 的具体数值,再结合公式(5)进而判断新冠感染的流行趋势。

二 高等数学与数学实验

在实际的应用问题中,模型建好之后,模型求解对于问题来说也是十分重要的。随着大数据与信息技术的不断发展,各种数学软件也越来越完善,这为问题求解和数学实验教学也提供了强有力的支持。日常教学中借助这些常用的数学软件如 Mathematica,Maple 和 Matlab 等可以有效提高解题的效率,让学生实时验证所得结果,还可以将抽象的理论知识直观展示,丰富了课堂的教学形式,也为学生提供了自我探索的空间。

数学实验其实就是以计算机为实验工具,以数学理论作为实验原理,以数学素材作为实验对象,以简单的对话方式或复杂的程序作为实验形式,以数值计算、符号演算或图形演示等作为实验内容,以实例分析、模拟仿真、归纳总结等作为主要实验方法,以辅助学数学、辅助用数学或辅助做数学为实验目的,以实验报告为最终形式的上机实践活动[7]。因此数学实验是数学学科里十分重要的尝试和探索,而大多数重要的数学进展都始于对例子的实验,例如动力系统的产生就源于对恒星和行星的研究[8]。数学实验不仅可以为数学建模提供求解方法,也可以直接用来求解数学问题。在高等数学的教学过程中渗透部分数学实验的方法,不仅让学生可以了解一些现成的工具包,同时也可以让学生感受知识的即学即用。另外,在遇到一些工具包无法解决的问题时,还可以激发学生进行自我编程,真正锻炼学生的编程和算法能力,进而让学生理解数学对实际问题的应用方法和体会数学真正的"美"。比如在空间曲线及参数方程的学习中,可以引入如下实验。

例3:绘制三维阿基米德螺旋线 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=t,\end{cases}(0<t<10\pi)$ 的图形。

此时可以使用 Matlab 里 plot3 命令绘制三维图像。plot3 一般语法调用格式是 plot3($\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{z}_1,S_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{z}_2,S_2,\cdots$),这里 $\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n$ 和 $\boldsymbol{z}_n$ 是向量或矩阵,S_n 是可选的字符串,用来指定颜色、标记符号和/或线形。

如下为一个三维螺旋线例子

```
>>t=0:pi/50:10*pi;
>>plot3(sin(t),cos(t),t)
>>title('Helix'),xlabel('sin(t)'),ylabel('cos(t)'),zlabel('t')
>>text(0,0,0,'Origin')
>>grid
>>v=axis
v=
  -1.0000   1.0000   -1.0000   1.0000   0   31.4159
```

输出如图1所示。

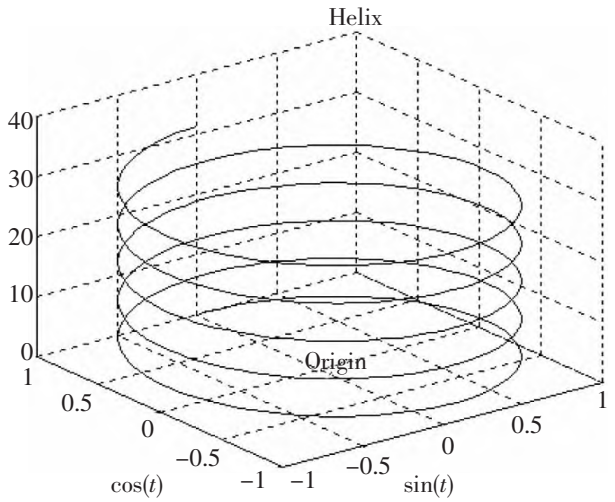


图1 三维阿基米德螺旋线

例4[9]:根据 logistic growth 所对应的微分方程

$$\frac{dN}{dt}=rN(\frac{K-N}{K})。$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

求解该经典的人口增长方程的解。

分析：本题目可使用 ode45 或者 dsolve 求解微分方程的数值解。

ode45 的使用方式：

ode45（微分方程对应的函数，某个区间上的点，区间左端点的函数值）。

dsolve 的用法如下：

dsolve（微分方程或者方程组），微分方程个数不限，等号使用“==”。

解法一 直接调用 ode45：

```
>>tspan=[1:0.4:2];r=5, K=1000;
>>[t,N]=ode45(@(t,N)r*N*((K-N)/K),tspan,1);
>>t'
>>N'
ans=
    1.000 0      1.400 0      1.800 0
ans=
    1.000 0      7.342 2     51.820 9
```

解法二 使用的 dsolve 函数直接求解该方程

```
>>syms N(t) r;
>>syms K positive;
>>eqn=dsolve(diff(N,1)==r*N*(K-N)/K)
```

运行结果如下

```
eqn=
    -K/(exp(C1-r*t)-1)
                0
                K
```

通过上面的四个例子我们看到数学模型与高等数学知识点间的紧密联系，同时数学实验对高等数学图形的描述也具有十分重要的意义。通过数学模型与数学实验的引入，不仅使得高等数学课程更加具有趣味性，更加贴近生活，也让同学们更加体会到数学的复杂多变，对于提高学生的工程应用能力十分有利。

三 结束语

结合自身教学及带学生参加数学建模比赛的指导的经历来看，发现通过将数学建模思想融入高等数学的教学，不仅能提高学生分析问题，解决问题的能力，同时还有助于学生创新能力的培养。与此同时，伴随着实际问题及数学工具的不断引入还可以带动学生自然而然地进入数学阅读。无论是课前关于问题背景的阅读，还是课中对知识点及方法的查漏补缺，还是课后进行的衍生阅读，对学生形成良好的数学阅读习惯都有着十分重要的意义。特别是在以计算机为标志的信息时代，数学阅读对整个科学和社会发展的重要性不言而喻[10]。正如李大潜院士所说“数学的教学，不仅要使学生学到许多重要的数学概念、方法和结论，而且应该在传授数学知识的同时，使其学会数学的思想方法，领会数学的精神实质，知道数学的来龙去脉，在数学文化的熏陶中茁壮成长”[11]。因此，在高等数学教学中引入数学建模的思想十分必要且具有深远影响。

参考文献：

[1] 李大潜.数学建模是开启数学大门的金钥匙[J].数学建模及其应用，2020，9(1)：1-8.
[2] 杨德庄.灵活的应用数学技术[J].数学进展，2005，34(1)：1-16.
[3] 石永福，王立群.现代数学技术及其影响[J].西北师范大学学报(自然科学版)，2005(2)：94-97.
[4] 姜启源，谢金星，叶俊.数学模型[M].3 版.北京：高等教育出版社，2003.
[5] 罗朝晖.关于数学建模思想渗入数学分析教学的思考[J].教育与职业，2007(20)：114-115.
[6] 陈波.悖论研究[M].北京大学出版社，2014.
[7] 盛中平，王晓辉.什么是数学实验[J].高等理科教育，2001(2)：25-28，24.
[8] 叶其孝.把数学建模、数学实验的思想和方法融入高等数学课的教学中去[J].工程数学学报，2003，20(8)：3-13.
[9] 卓金武，冯新月，刘一川，等.MATLAB 高等数学分析(上册)[M].1 版.北京：清华大学出版社，2020.
[10] 韦程东.数学建模能力培养方法研究[M].北京：科学出版社，2012.
[11] 李大潜.将数学建模思想融入数学类主干课程[J].工程数学学报，2005，22(8)：5.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net