

“数学建模”在日常教学中的

落实与思考

——有感于“二次函数与一元二次方程、不等式”研讨课

江苏省苏州工业园区星海实验中学 冯俊

新一轮课改强调了数学学科应当培养、促进学生发展的六大核心素养,其中“数学建模”尤显突出,数学和实际生活的密切联系与融合在新课标试卷上得到了充分的体现.因此,数学建模就成为高中数学教与学的常态,从“幕后”走向了“台前”,自然而然的成为一个亟待攻克的课题.

数学建模是对现实问题进行数学抽象,用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养.数学模型搭建了数学与外部世界联系的桥梁,是数学应用的重要形式.数学建模表现为:发现和提出问题,建立和求解模型,检验和完善模型,分析和解决问题.通过高中数学课程的学习,学生要能有意识地用数学语言表达现实世界,发现和提出问题,感悟数学与现实之间的关联.

数学应用历来是师生不愿面对的话题,感觉“繁、难”.久而久之,数学应用就似乎成为可有可无的板块,师生几乎达成了共识——复习了也没用,会做的大家都会,不会做的大家都不会.因此,大家都很懈怠,有意的回避着数学应用,更谈不上数学建模的教学与研究.现实的考试要求让师生有点措手不及,数学应用也就成为大家不得不正视的问题.

那么,如何在日常的教学彰显数学应用呢?我认为,唯有立足于课堂,并且每一节课都要有一种执念:我的这一节课如何加入实际应用的元素?将自己编题和变式训练贯穿课堂,让数学建模扎根于学生心底,培养学生的开放性、创新思维.我坚信,随着学习的积淀,学生不但不会畏惧应用题,反而会增加学习数学的兴趣和信心.

下面笔者就以人教A版“二次函数与一元二次方程、不等式”的教学为引子,谈谈自己在平时教学中的

做法.

一、数学建模植根于课堂的课例

1.内容分析

“二次函数与一元二次方程、不等式”是人教A版高中《数学》(必修第一册)的教学内容,本节课的教学目标是:(1)从函数观点看一元二次方程.了解函数的零点与方程根的关系;(2)从函数观点看一元二次不等式.经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义;(3)借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

本节课的教学要求就是让学生掌握三个二次之间的关系,能够从几何角度知晓二次不等式解集的来龙去脉,并能够进行简单的应用.所以,在设计本节课时,我想从具体实例引出二次不等式,进而引导学生从函数角度去解二次不等式,总结解决问题的一般步骤,最后巩固练习并以开放性数学应用问题的提出和解决结束本节课.

2.教学设计

开场白:数学是研究现实生活中数量关系和空间形式的数学——恩格斯

2.1 知识建构素养奠基

问题1 园艺师打算在绿地上用栅栏围一个矩形区域种植花卉.若栅栏的长度是24m,围成的矩形区域的面积等于 20m^2 ,则这个矩形的边长为多少米?

问题2 园艺师打算在绿地上用栅栏围一个矩形区域种植花卉.若栅栏的长度是24m,围成的矩形区域的面积要大于 20m^2 ,则这个矩形的边长为多少米?

【总结】 二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集			
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集			

2.2 知识应用素养形成

【题型一】 一元二次不等式的解法

例1 求下列不等式的解集:

- (1) $3x^2 - 2x - 1 < 0$; (2) $-x^2 - x + 1 \leq 0$;
- (3) $x^2 - x + 3 > 0$.

2.3 知识深化素养提升

【题型二】 一元二次不等式解法的应用

例2 已知不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $\{x|2 < x < 10\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

问题研究: (1) 你会解 $x^2 - ax + 20 < 0$ 这个关于 x 的不等式吗?

(2) 你能设计一个问题情境, 让所有的数量关系满足这个不等式吗?

2.4 知识内化素养升华(课堂小结)

3. 教后反思

本节课的重点是从形和数两个方面理顺三个二次之间的关系, 熟练掌握一元二次不等式的解法, 并进行简单应用. 本节课如果仅仅局限于解不等式的话, 内容就显得比较单薄, 学生也缺乏学习兴趣. 因此, 我设计了实际应用环节. 客观世界中有各种各样的运动变化现象, 所有这些都表现为变量间的对应关系, 这种关系常常可以用函数模型来描述, 并且通过研究函数模型就可以把握相应的运动变化规律. 所以, 这节课的难点在于如何加入实际应用的元素.

实际应用的环节要始终贯穿于我们的每一节课堂, 教师要将这个作为备课的一部分, 唯有这样, 师生双方才能真正的接受数学建模, 也才能不畏惧, 并充满信心.

二、数学建模在课后作业中的体现

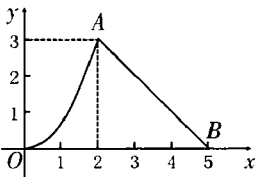
2021年八省新高考适应性考试第15题为“写出一
第 60 页

个最小正周期为2的奇函数”. 此题难度不大, 但它是一道完全开放性试题, 所以在考场上对学生的心理触动还是蛮震撼的, 学生不太适应. 学生和老师习惯了有唯一答案的标准化试题, 对于这种开放性问题较少涉及, 刚拿到这种题时必定会比较紧张. 如何消除这种紧张感? 唯有将开放性问题作为平时作业的常态要求才能解决此问题. 在高中数学知识体系中, 实际应用问题也是一个难点, 我们不妨将开放性和数学建模相结合, 一举两得. 新人教A版教材上给了我们很多的案例, 现以一道课本题为例.

1. 题目

如图, 函数 $y = f(x)$ 的图象由曲线段 OA 和直线段 AB 构成.

- (1) 写出函数 $y = f(x)$ 的一个解析式;
- (2) 提出一个能满足函



数 $y = f(x)$ 图象变化规律的实际问题.

2. 学生习作展示

习作1: 汽车开始2分钟作加速行驶, 路况原因, 后3分钟作匀减速行驶.

习作2: 上课前, 小明同学快速跑到操场喊回小张同学, 然后两人匀速走回教室.

习作3: 近几天的气温呈现很大变化, 前两天温度提升很快, 接下来3天又慢慢地匀减速降温.

习作4: 上课时课堂纪律不太好, 老师的怒火前2分钟急速增长, 接下来3分钟慢慢平息.

习作5: 给气球充气, 开始2分钟气球快速膨胀, 可能气球有了破损, 气球又慢慢地跑气, 逐渐变小.

.....

学生的答案五花八门, 涉及到各门学科, 学生在完成此作业时不但不畏惧, 反而乐在其中. 我们知道, 分析法是数学的一个重要的思想方法, 它的特点是执果索因, 上述试题颇有这种意味. 通过这样的执果索因训练, 学生会从中学会如何寻找数量关系, 如何进行数学与实际应用之间的转换.

标准答案似乎已经成为一种情结, 萦绕在教师和学生心头挥之不去, 这非常不利于培养学生的思维能力. 开放性题目没有现成的答案, 迫使学生不得不放弃对书本的依赖, 养成开动脑筋、积极思维的习惯. 经

常进行开放性题目的练习,有利于学生的思维朝着严密、深刻、全面的方向发展,有利于学生在解题过程中个性和创造性的发挥。应该说开放性试题可以创造让所有学生参与到数学学习中来的机会,留给学生充分发挥联想创造和发散思维的空间,学生都会享受到属于自己的成功。学生在类似活动中不但能够有获得感,而且还会在做实际问题时循着命题者的思路,探寻数量关系,从而顺利建模、解模、回代。久而久之,学生的数学建模能力一定会迅速提升。

三、学生研究性学习中的数学建模研究案例

研究性学习给学生提供了探索未知世界的平台,激发了他们强烈的求知欲,通过观察、猜想、试验、设计、分析、评估等环节的亲身经历,掌握研究问题的方法,让他们学会学习。数学来源于生活,又服务于生活,学生完全可以从身边贴合他们实际的问题入手,提出数学问题,并加以解决,提高学生学习数学的热情和兴趣,引导学生自愿、主动学习数学。下面就节选本班学生研究性论文的一部分。

研究课题1 团队竞技体育的胜负预判数学模型

学生3人学习小组从体育竞技游戏中获得灵感,想出了将球员各项数据通过规定算法,得到他们想要的评价数据这一思路。并将每个球员的综合评价加在一起作为团队总分。

他们从网上找来篮球比赛的数据,并将数据分为进攻端、防守端、配合端三个部分。规定完各项数据后,他们将这三项加权计算得出了两队的的数据,进攻端直接为球队带来分数,权重肯定是最大的,防守与配合一个带来稳定性一个带来协调性,权重相同,一开始的假设算法是:总评=进攻端 $\times$ 40%+防守端 $\times$ 30%+配合端 $\times$ 30%。

接下来,他们又用篮球比赛的现实数据来检验数学模型,发现了其他的影响因素,因此将数学模型调整为: $R=[A \times 40\% + D \times 30\% + C \times 30\%](V+M)$ 。其中,设进攻端数值为A(Attack),防守端为D(Defense),配合端为C(Cooperation),最大摄氧量为V(V02max),心态正能量等级为M(Mentality),结果为R(Result)。

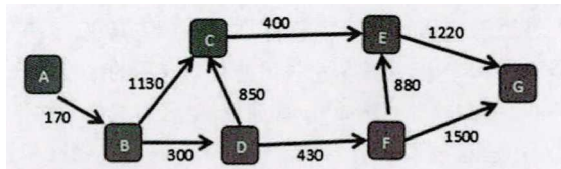
最后,为了验证模型的可信度,研究小组用2016年里约奥运会中国女排对阵巴西女排的比赛数据进行了拟合,发现效果较好。

研究课题2 带权有向图的最短路径问题

(1)问题提出:百度地图等软件会在路径选择中提供一种最短路径方案,那么最短路径究竟如何求出呢?

(2)模型假设:将模型看做一个带权有向图、将每条路径看做是直线、忽略转弯或变道时的行驶距离、将距离近似看为整数。

(3)模型建立:将路径模型简化为带权有向图。



(4)程序设计:建立邻接矩阵,编写Python代码,数据代入输出。

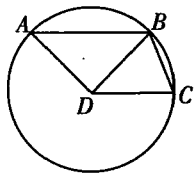
(5)数据检验,回到实际问题。

学生发现问题的能力,以及学习能力往往会超过老师的预期。信息化时代,高中学生有着敏锐的观察力,丰富的想象力,果断的执行力,强大的合作力等,这些足以让我们老师有理由、有责任给他们以展现数学素养的机遇和平台。相信他们一定会在经常性的锻炼中超越自我,全面发展。

四、数学建模在教师试题命制中的尝试

一道好的数学应用题不但需要有正确的专业知识,还要有新颖的问题背景,解决问题的方法要符合学生实际能力。因此,应用题的命制往往会成为很多老师的软肋。如何提升命题能力?我想比较好的方法就是题目改编,给枯燥的数学问题添加实际背景,从而给予它鲜活的“生命”。下面是笔者的一个案例。

1. 题根(2021年新高考八省联考)在四边形ABCD中, $AB \parallel DC$, $AD = CD = BD = 1$ 。



(1)若 $AB = \frac{3}{2}$,求BC;

(2)若 $AB = 2BC$,求 $\cos \angle BDC$ 。

2. 数学建模问题

在市民运动公园内有一个半径为1km的圆形湖泊,中心岛D在圆心处,湖边上有3座亭子A,B,C,中心岛和3座亭子构成一个四边形ABCD,AB,BC有健康步道, $AB \parallel CD$ 。

(1)为了给市民营造良好、安全的运动健身环境,拟在步道AB,BC铺设防滑砖,若AB长为 $\frac{3}{2}$ km,则步道

基于 GeoGebra 环境下函数概念的

教 学 研 究

——以“指数函数的概念”的教学为例

北京市顺义牛栏山第一中学 车洪辉

《普通高中数学课程标准(2017版)》(以下简称《课标》)指出,注重信息技术与数学课程的深度融合,可以提高教学的实效性.并建议,结合有关概念教学,利用信息技术形象直观地显示概念的本质属性和特征;运用计算机的数据处理和计算功能,揭示数学问题的变化规律.在我国高中课程改革实践中,多种版本的教科书均在尝试信息技术和课程内容的融合.

GeoGebra 软件是一款集几何绘图与代数运算能力于一身的动态数学软件,它具有绘图工具齐全,使用简单,交互性强,易操作等优点.

指数函数概念的形成需要较大的数据处理和计算,借助 GeoGebra 软件可以快速处理数据,并进行计算与画图的探索,能提高本节课教学的实效性.

1. 教学片断

1.1 探究 1

问题 1 随着中国经济的高速增长,人民生活水平的不断提高,旅游成了越来越多家庭的生活方式,出游人数不断增加.有 A、B 两景区针对旅游旺季的到来采取了不同的应对措施, A 景区提高景区门票价格, B 景区取消门票,哪种措施更有利于增加景区的旅游收入呢?

生 1: A 景区,因为它提高景区门票价格.

生 2: B 景区,因为它取消了景区门票,旅游人数会增多.

(接上页) BC 需要铺设多长的防滑砖?

(2) 某人在中心岛观察到 A、C 两处各有一人同时骑车驶向 B, 并且同时到达 B. 现已知 A、C 两人骑车速度比为 2:1. 那么, 从 D 处观察 B、C 的视角余弦值为多少?

数学建模不仅仅是对学生的要求,更是对老师的要求,唯有老师自身素质提升才有可能指导学生进步.我们经常感慨学生的数学应用问题解决能力差,其实很多时候责任多数在老师,如果老师都不重视,何谈学生能力发展? 因此,老师应当和学生一道将数学建模纳入平时的教学设计、教学计划之中.

第 62 页

显然,这样对景区收入的分析是片面的,不符合新时代背景下数学教学的育人价值.此时,应当引导学生继续思考.

师: 如何让你的观点更加具有说服力呢?

生 3: 用数据来说话.

问题 2 下表是 A、B 两景区 2001 年至 2015 年的游客数量(表略), 比较两个景区游客数量的变化情况, 你能发现两景区旅游数量的变化规律吗?

生 3: 随着年份的逐渐增加, 游客的旅游数量也在逐渐增加.

师: 非常好. 哪位同学还有更深入的理解和发现呢?

生 3: A 景区随着年份的增加, 游客的数量也随着稳步增长.

师: 很好, 你是怎么发现的?

生 3: 既然游客的数量是增加的, 可考虑 A 景区游客数量增加了多少.

师: 非常好! 按照同样的思路, 我们也可以考虑 B 景区游客数量增加情况.

下面我们借助于 GeoGebra 软件来帮助我们计算出具体的数据. (教师边讲解边操作软件, 屏幕显示出 A 景区游客数量的离散图与残差图等)

根据数据的分布规律, 回归模型选择“线性”, 系统自动拟合出相关系数在 0.9999 以上的线性回归模

数学建模能力的提升依赖于师生长期的坚持和维系. 需要老师在平时的课堂上时刻想着如何增加建模的元素, 需要老师把开放性建模试题命制作为学生的必做作业, 需要老师多鼓励学生进行小组合作学习, 大胆地提出问题, 建立模型, 并尝试解决. 需要老师做好示范, 多引导, 用自身行动去感染学生. 我们坚信, 只要将数学建模植根于上述教学的四个环节, 并长期坚持, 一定会促使师生数学建模能力的大幅提升, 从而实现多元发展的教育愿景.